http://www.sylvette-denefle.fr
Sylvette Denèfle, "Intuitionnisme et philosophie des sciences", Systèmes symboliques, science et philosophie, Éd. du CNRS, Paris, 1978, p.81-92

INTUITIONNISME HOLLANDAIS ET PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES

L'intuitionnisme hollandais, école mathématique originale, qui se distingue par un constructivisme exigeant, apporte sa réponse aux problèmes épistémologiques importants et résout de façon intéressante les questions de philosophie des mathématiques.
Aux interrogations sur la possibilité, la certitude et l'efficacité mathématiques, l'intuitionnisme répond par l'exposé cohérent d'une technique appuyée sur une philosophie qui la supporte.

LA CRITIQUE INTUITIONNISTE

En effet, la mathématique qui est seule certaine, possible et efficace est celle qui passe la critique intuitionniste, critique qui est elle-même la traduction pratique des positions philosophiques de l'école hollandaise. "En séparant complètement les mathématiques du langage mathématique, en particulier des phénomènes du langage qui sont décrits par la logique théorique, et en reconnaissant que la mathématique intuitionniste est essentiellement une activité de l'esprit hors du langage ayant son origine dans la perception d'un mouvement du temps" qui constitue l'intuition de base des mathématiques (BR -52- p. 140-41), Brouwer pose les fondements de la critique intuitionniste.

L'idée qui sous-tend cette critique est qu'en mathématiques l'esprit est actif, que la mathématique est d'abord une activité de la pensée, une action humaine. C'est une construction mentale et le but de l'intuitionnisme est d'en explorer jusqu'au bout les possibilités.

L'origine de cette activité est dans la dualité provenant de l'intuition temporelle. Pour Brouwer, en effet, la conscience est, dans les profondeurs de l'être, le siège d'un lent mouvement de balancement du repos à la sensation, sans intervention d'aucune volonté. Ce balancement est un mouvement du temps en ce qu'il fait passer la conscience d'une sensation présente à une autre sensation, tout en conservant la première comme sensation passée. Ces deux sensations, présente et passée, se distinguent elles-mêmes de l'état de repos. Et lorsque tout contenu est éliminé de ces sensations, ne demeure qu'un substrat vide qui est l'intuition de la dualité. C'est donc dans la conscience que prend naissance, à travers la notion du

temps postulée dans notre esprit, l'intuition de la dualité, de l'unité et, par réitération, des entiers et du continu linéaire.
Cette intuition est nécessaire pour donner un contenu à toute construction mathématique qui, sans elle, ne serait qu'une forme verbale vide. L'activité mathématique est le produit direct de notre activité mentale. La mathématique est le reflet de notre pensée et ne peut donc en aucune manière être considérée comme un outil qu'un formalisme adéquat permettrait d'améliorer. Ainsi, les intuitionnistes considèrent un texte mathématique comme tout autre texte, pour son contenu et non pour sa forme. La langue qui exprime la mathématique n'est pas moins ambiguë que la langue quotidienne. Le fait qu'elle soit formelle n'élimine pas les difficultés de l'interprétation des signes et on ne peut jamais affirmer qu'une langue formelle rend compte de la construction mathématique mentale qu'elle essaie d'exprimer. En fait, elle n'est qu'un moyen pratique pour mémoriser la pensée mathématique et la communiquer à autrui. D'ailleurs, une axiomatique ne recouvre jamais totalement la théorie qu'elle reflète puisque de nouveaux résultats ou de nouvelles démonstrations amènent des changements, des réajustements de l'axiomatique. Troelstra résume le point de vue intuitionniste très clairement en écrivant "le langage des mathématiques est un essai (nécessairement toujours inadéquat) pour décrire les constructions mentales. Parler des mathématiques intuitionnistes est donc une façon de suggérer des constructions analogues chez les autres." (TR -69- p.4).

Heyting (-54-) rend compte de ce fait en montrant que, lorsque nous avons le sentiment d'appliquer une loi logique, nous sommes trompés par des particularités du langage qui n'est pas adéquat à l'expression des constructions mentales. Ainsi, par exemple, la mise en évidence d'une contradiction semble faire appel directement au principe logique de contradiction. Mais ce n'est, en fait, que l'affirmation qu'une certaine construction mentale n'est pas possible sous certaines conditions. C'est donc l'expression d'un processus mental et non l'application d'un principe extérieur. La logique n'est qu'une expression de règles de constructions mentales particulières, c'est une généralisation, une abstraction.

LA LOGIQUE INTUITIONNISTE

Après une telle prise de position, on peut se demander dans quelle mesure précisément les principes de la logique classique seront remis en cause par l'école hollandaise. Brouwer (BR -52- p.41), répond à cette interrogation en indiquant que nous pouvons trouver une construction mathématique mentale sous les principes logiques si seuls le principe de contradiction et le syllogisme entrent en lice ; mais qu'aucune construction mentale n'est reflétée si le tiers exclu est utilisé pour poser de nouvelles vérités mathématiques, exception faite de certains cas.

Le principe du tiers exclu (il existe un élément D ayant la propriété P ou tout élément de D a la propriété non-P si nous considérons un ensemble D fini) est applicable sans problème car, il est évident qu'on peut en considérer chaque élément, du moins en principe et si la propriété est décidable déterminer si on trouve un élément de D ayant la propriété P ou si tous ont la propriété non-P. Ce procédé est absolument constructif et Brouwer ne fera aucun reproche à cette application du tiers exclu. Mais le problème devient tout à fait différent si D est un ensemble infini. Le procédé utilisé pour un ensemble fini est inapplicable et seul un procédé détourné pourrait nous venir en aide. Le principe du tiers exclu ne peut donc s'appliquer dans ce cas. Or, si le principe du tiers exclu est réfuté il s'ensuit que des principes qui en sont des corollaires, recevront la même critique, notamment le principe de la testabilité affirmant que tout énoncé peut être démontré non-contradictoire ou contradictoire et le principe de la réciprocité de la complémentarité selon lequel la rectitude d'une propriété suit de l'impossibilité de la négation de cette propriété.

Si l'on s'interroge sur la nécessité d'une telle intransigeance, nous devons nous rappeler que pour les intuitionnistes le principe du tiers exclu n'est considéré comme *a priori* qu'abusivement, qu'il est important de ne poser que des résultats fondés soigneusement et reflétant notre activité mathématique mentale et qu'il n'est donc d'aucun gain fondamental de poser des résultats dont la base n'est pas stable, même si elle n'est pas contradictoire. Pour Brouwer qui recherche incontestablement un fondement sans faille à la mathématique, il ne sert à rien d'extrapoler sur les connaissances car l'assise scientifique n'y gagne en rien. On rappellera à ce propos sa comparaison célèbre : "une théorie incorrecte, même si elle ne peut être invalidée par aucune contradiction qui la réfuterait, n'en est pas moins incorrecte tout comme un criminel ne reste pas moins criminel même si aucune cour de justice ne le condamne." (BR -23- p.336).

En fait, ce qui distingue essentiellement la logique intuitionniste de toute autre logique, c'est la place qui lui est accordée. En effet, les intuitionnistes analysent le domaine de validité de la logique d'une façon tout à fait différente de celle des mathématiciens classiques. L'universalité reconnue à la logique n'est à leurs yeux qu'une extrapolation indue du domaine fini à la mathématique, c'est-à-dire à l'infini. Pour Brouwer et son école, les phénomènes naturels sont maîtrisables si nous les pensons comme des systèmes discrets finis (en acceptant de laisser demeurer une part d'inconnu) qui sont liés par des lois spécifiques de concaténation temporelle. Et les lois de la logique classique sont précisément applicables à ces systèmes finis. Or, ces lois, malgré leur non-adéquation à tout le donné empirique et en particulier la non-vérification de toutes les inférences qu'elles produisent (antinomies) ne sont pas mises à l'épreuve de la vérification selon un principe tout à fait *a priori*. Néanmoins elles sont considérées comme exactes probablement du fait qu'elles sont plus souvent appliquées à la vie quotidienne que dans le domaine précis des mathématiques. Leur caractère d'universalité *a priori* s'établit de telle sorte que l'on oublie leur origine de relations de systèmes finis rendant partiellement compte des phénomènes et qu'on les applique sans remise en cause à un domaine infini auquel elles ne sont pas adaptées. Le monde de la perception nous convainc de la solidité des principes logiques et on oublie que de ce monde, nous n'avons qu'une connaissance partielle et finie à laquelle la logique s'adapte mais qui est éloignée de constructions mathématiques que nous pouvons élaborer et qui dépassent considérablement le cadre des sciences naturelles. Jusqu'à l'apparition de contradictions à l'intérieur de la mathématique, la logique a maintenu son statut d'*a priori* mais cette apparition doit permettre de prendre conscience de l'origine du mal qui est dans l'application à l'infini de lois du fini. L'universalité logique découle d'une certaine conception du langage. En effet, le langage est efficient dans un groupe et comporte donc des vérités que l'on peut expérimenter. Les lois logiques sont l'expression des moyens utiles qui permettent de déduire une vérité d'une autre et qui ont été primitivement expérimentés. Le comportement des sujets du groupe est donc affecté par la logique qui apparaît dès lors comme porteuse de vérités. Mais, et c'est là la transition fatale du point de vue intuitionniste, la logique ne comportait pas de vérités avant que ces vérités n'aient été expérimentées. La logique est le résidu de suites causales utiles, elles recouvre un certain nombre d'expériences efficientes mais, de ce fait, on ne peut conclure qu'elle est valide pour toutes les expériences possibles. Cette croyance en l'existence de vérités non-expérimentées est le fondement de la conception classique de la logique. Pour les intuitionnistes, au contraire, il n'y a pas de logique universelle car il n'y a pas de vérités *a priori*. La croyance en de telles vérités qui est tout à fait rejetée des sciences de la nature et de la vie quotidienne, s'est développée dans les mathématiques qui ont un domaine d'expérimentation très limité et si éloigné à leur origine qu'il n'entre pratiquement pas en ligne de compte. Or, jusqu'à la fin du XXème siècle, aucune remise en cause de la validité de la logique en mathématiques ne se produisit. Selon Brouwer, ce fait relève de l'histoire des civilisations mais il n'accepte pas de développer la mathématique, en tant qu'il la veut expression de l'activité fondamentale du sujet, sur cette base aléatoire. Cette remise en question du rôle de la logique ne signifie pourtant pas son élimination puisque les intuitionnistes reconnaissent un certain mécanisme mental du déroulement des assertions mathématiques qui s'exprime à travers la logique intuitionniste. Mais, à la différence de la logique classique, la logique intuitionniste ne prétend ni à un rôle ontologique, ni à un rôle exhaustif, ni à un rôle d'*a priori*. Elle ne reflète que les développements efficients des constructions mathématiques et elle est une expression secondaire de certains schémas mathématiques mentaux.

LA MATHÉMATIQUE INTUITIONNISTE

Après cette phase critique, l'intuitionnisme élabore la nouvelle mathématique. Il reconnaît la possibilité de créer de nouvelles entités, "premièrement sous la forme de suites procédant infiniment dont les termes sont choisis plus ou moins librement à partir d'entités mathématiques antérieurement acquises, de telle sorte que la liberté qu'on avait peut-être au premier choix peut être irrévocablement soumise, à chaque choix, à des restrictions progressives tandis que toutes ces restrictions ainsi que les choix eux-mêmes, peuvent à chaque étape être faits en fonction des expériences mathématiques éventuelles du sujet créateur dans l'avenir ; deuxièmement sous la forme d'espèces mathématiques, c'est-à-dire de propriétés possibles d'entités mathématiques antérieurement acquises. Les espèces sont des ensembles dont nous connaissons une propriété caractérisant les éléments.

Mais les intuitionnistes distinguent deux sortes d'ensembles : les espèces, et les ensembles que l'on peut définir en donnant une loi qui détermine chacun de ses éléments. Un tel ensemble sera appelé par Brouwer un déploiement.

Une espèce est définie très nettement par Brouwer comme "une propriété que les entités mathématiques peuvent posséder" (BR -52- p.142) et les membres d'une espèce sont les entités mathématiques définies avant l'espèce et qui satisferont la propriété.

Un déploiement est un couple de lois dont la première, la loi de déploiement, détermine certaines suites de nombres naturels comme admissibles pour le déploiement, et la seconde, la loi complémentaire, associe à chaque suite déterminée par la loi de déploiement un objet mathématique.

À l'aide de ces notions nouvelles, les intuitionnistes ont entrepris la reconstruction des mathématiques, c'est-à-dire de la partie fondée de cette science. L'exigence de constructivité élimine certaines possibilités de démonstrations classiques, en particulier pour ce qui est du maniement de l'existentielle, du raisonnement par l'absurde, de la réciprocité de certains énoncés, de l'affirmation de l'infini actuel. Cette même exigence introduit par contre des distinctions plus fines entre les notions (par exemple la distinction entre convergences positive et négative), reconnaît la légitimité d'un infini potentiel ce qui, entre autres, permettra le raisonnement sur des éléments d'infinis de cardinalités supérieures à celle du dénombrable et garde l'induction comme raisonnement constructif pour les cas où une certaine généralité nécessaire nous fait considérer des universelles ou des existentielles qui ne sont pas immédiatement données dans chacun des cas particuliers qu'elles recouvrent mais qui en sont, en quelque sorte, des abréviations.

D'autre part, si l'axiomatique et le raisonnement formel sont fortement critiqués dans leurs implications métamathématiques par les intuitionnistes, ils n'en sont pas moins reconnus dans leur caractère de maniement pratique. Enfin, une nouvelle donnée s'introduit parfois dans le développement mathématique, donnée inhérente à l'intuitionnisme, donnée qui en est le centre même, à savoir l'intervention du sujet libre.

Compte tenu de ces différentes exigences, la reconstruction intuitionniste de la mathématique a tenu certaines de ces promesses, malgré les difficultés techniques et a même ouvert de nouvelles voies de recherches. Elle a donné des démonstrations nouvelles de certains résultats classiques, en a confirmé d'autres ou encore éliminé certains et a apporté des résultats nouveaux qui se sont révélés importants.

LA PHILOSOPHIE INTUITIONNISTE DES MATHÉMATIQUES

Pour les intuitionnistes, les fondements des mathématiques ne sont pas une partie des mathématiques mais on pourrait dire plutôt que les mathématiques s'insèrent dans les recherches de fondements. En fait, pour Brouwer, toute réflexion sur les mathématiques doit commencer par estimer les conditions dans lesquelles l'activité mentale du mathématicien prend place pour déterminer la part des présupposés philosophiques qui y entrent. L'intuitionnisme veut éliminer de la mathématique toute idée préconçue pour l'asseoir sur une base stable qui en garantisse la rectitude puisqu'il n'a qu'un critère subjectif du vrai : l'évidence. La mathématique intuitionniste est assurée, d'une part, par son origine *a priori* pour ce qui est des notions premières, et, d'autre part, par sa méthode pour ce qui concerne son développement. Comme le remarque de nombreuses fois Heyting, on peut considérer l'exigence intuitionniste comme un état d'esprit permettant d'établir ce que l'on peut affirmer en mathématiques sans risque de contradiction. En fait, l'intuitionnisme doit davantage être considéré comme une activité que comme une doctrine, ce par quoi nous devons entendre que si la recherche sur les fondements a en toile de fond une certaine philosophie, ceci n'est en rien nécessaire et que son but profond est de rétablir sûrement la mathématique quelle que soit la philosophie que l'on adopte. On peut d'ailleurs remarquer que même les mathématiciens de tendance "platoniste" ne dénient pas à la mathématique intuitionniste une sûreté plus grande que celle de la mathématique classique en ce qui concerne les résultats métamathématiques puisque, lorsqu'il s'agit des problèmes de non-contradiction de l'arithmétique, le théorème de Gödel ayant démontré l'impossibilité de l'entreprise de Hilbert dont les méthodes strictement finitistes ne permettent pas les démonstrations de non-contradiction escomptées, ils n'hésitent pas à démontrer ce résultat à l'intérieur du système intuitionniste qui n'est alors garanti par rien d'autre que ses méthodes. On doit signaler à ce propos que les intuitionnistes ne prétendent pas à une rigueur et une certitude absolues mais seulement à une certitude humainement décidable par sentiment d'évidence. Si donc, pour Brouwer, la mathématique doit commencer par s'interroger sur les fondements des théories existantes, ce n'est pas tant pour les détruire que pour les établir plus sûrement même si cette assurance doit les amputer considérablement.

Ce n'est qu'une fois ce travail critique qui est l'aspect le plus connu de l'intuitionnisme accompli, qu'il sera possible de voir les parties de la mathématique qui resteront intactes et de proposer de nouvelles méthodes pour reconstruire parmi les autres celles qui pourront l'être.

Quant au développement de la mathématique, c'est-à-dire au développement des constructions légitimes du point de vue intuitionniste, il est garanti par l'utilisation à partir de notions *a priori* d'une méthode strictement contrôlable. Pour les intuitionnistes, la vérité mathématique dépend de notre intellect (ou du moins, nous ne pouvons pas supposer légitimement autre chose à l'intérieur de la science) et nous sommes donc tenus de ne rien poser que nous n'assurions, c'est-à-dire de ne considérer que ce que nous construisons. Pour Brouwer l'efficacité d'un raisonnement mathématique provient de deux origines ; premièrement nos concepts mathématiques de vase (c'est-à-dire le nombre et le continu linéaire) sont garantis par l'intuition temporelle *a priori* que nous avons de la dualité ; deuxièmement notre méthode doit demeurer dans les limites humaines c'est-à-dire que deux opérations seulement nous sont accessibles : créer un nombre ordinal fini et créer un nombre ordinal infini ω .

La mathématique intuitionniste est synthétique *a priori.* C'est déjà à cette borne que Poincaré amenait la fécondité et la certitude mathématiques à travers l'induction et le nombre. C'est là encore que l'on retrouve l'école hollandaise. Cette formulation kantienne, si elle convient bien à la conception intuitionniste, doit cependant être éclairée car elle ne recouvre pas fidèlement les vues de Kant, quand elle concerne les intuitionnistes. La mathématique intuitionniste est *a priori* car elle trouve son origine dans le temps qui nous est donné *a priori*. Elle est synthétique car son contenu est essentiellement intuitif.

Examinons ce point avec précision car il a pu donner lieu à des interprétations apparemment contradictoires. En effet, l'intuition mathématique si elle est *a priori* de par son origine, l'est également en ce qu'elle ne saurait dépendre de l'expérience et en particulier de toute vérification expérimentale. Dans sa thèse (BR -07- p.121), Brouwer fait une distinction entre les concepts inséparables de toute expérience externe et les concepts qui apparaissent nécessairement dans le réceptacle mathématique de l'expérience. Selon lui, le premier genre de concept n'existe pas car l'expérience ne se présente pas nécessairement dans la forme de faits bien définis, elle passe à travers la structure mathématique de l'esprit. C'est la conception brouwerienne de la connaissance qui rend compte de cette distinction : nous n'avons d'expérience qu'à travers notre esprit, c'est-à-dire notre conscience où s'est développée, à travers la sensation, la notion de dualité c'est-à-dire déjà la mathématique. Au niveau de la conscience profonde, ("in its deepest home" écrit Brouwer), il y a sensation mais on ne peut pas parler d'expérience. Dès lors, on comprend que la mathématique ne saurait dépendre de l'expérience. Toutefois, les intuitionnistes ne nient pas que l'expérience, c'est-à-dire le monde extérieur, donne lieu à la formation de concepts mathématiques ; et c'est ce point qui a parfois été interprété comme contradictoire du premier. En fait, c'est alors le monde extérieur en tant qu'il provoque des sensations sur notre conscience que est en cause et non l'expérience comprise comme vérification, comme confrontation consciente. Il est un point à rappeler, c'est que nous ne parlons là que de la genèse mentale de la mathématique et que l'apparition de la communication mathématique est considérée par les intuitionnistes comme un phénomène tout à fait distinct et dont l'origine peut être justifiée par une explication empiriste au sens ordinaire, à savoir que les premières formalisations mathématiques sont apparues en liaison étroite avec l'expérience quotidienne.

En bref, c'est donc une intuition directe sans rapport avec l'expérience qui justifie la confiance que l'on peut accorder aux mathématiques. C'est cette intuition qui supporte la conception selon laquelle la mathématique est la partie la plus exacte de notre pensée et qu'elle est partie intégrante de toutes nos pensées. Cette intuition directe se manifeste essentiellement par deux actes mentaux fondamentaux : la répétition et le libre choix qui génèrent à leur tour les concepts mathématiques tels que le nombre, le continu, les espèces, les suites procédant infiniment, etc...

Ces deux actes mentaux sont justifiés par Brouwer par l'isolement de la conscience qui ne subit aucune contrainte. Pour les intuitionnistes en général, ils sont justifiés en ce qu'on ne peut supposer moins pour asseoir le développement mathématique.

Pour la répétition ne se présentent guère de difficultés. Avec le libre choix par contre, une complexité technique très grande est introduite. Mais nous sommes là en présence d'un point essentiel de l'intuitionnisme. La justification de cette conception tient dans l'idée que la mathématique doit être établie sur une base sans présupposé. Si donc l'esprit ne reçoit aucune détermination dans l'élaboration de ses concepts mathématiques, il est libre de toute contrainte extérieure. Cette idée de la génération mentale des mathématiques ne pose de problèmes que lorsqu'il s'agit de mathématiques appliquées, puisqu'elle justifie, de par sa nature, la certitude mathématique. Pour en rendre compte philosophiquement, il faut postuler une position idéaliste sur le problème de la connaissance. À moins que le choix de cette liberté ne soit vu que comme position comportant le moins de

présupposé antécédents possible. Quoiqu'il en soit de la question philosophique, on peut remarquer que, en ce qui concerne les mathématiques, cette position a deux conséquences :
- du point de vue des fondements, elle nous place dans un constructivisme strict puisque c'est la barrière nécessaire à la rectitude des concepts et raisonnements utilisés (ce fait a d'ailleurs paradoxalement rapproché considérablement l'intuitionnisme d'un empirisme dans la mesure où tous les raisonnements intuitionnistes ne s'appuient que sur de l'existant) ;
- du point de vue technique, la liberté du sujet en mathématiques a introduit deux aspects nouveaux :
a) une série de concepts nouveaux et une nouvelle expression du continu (continu compris comme "développement décimal dans la liberté de sa genèse" (WA -24- p.253);
b) l'intervention du sujet en mathématiques.

Sur le deuxième point, qui a entraîné beaucoup de critiques, la réponse intuitionniste est que la liberté du sujet n'intervient pas comme arbitraire en mathématiques car ne sont utilisés que des objets mathématiques construits, c'est-à-dire des objets que l'on possède déjà dans la totalité qui intervient. Cependant, malgré le soin apporté par Heyting, en particulier, à démontrer la non-ingérence de cette conception dans le déroulement mathématique puisque l'intuitionnisme ne pose pas d'hypothèque sur le devenir, la critique s'est fortement concentrée sur ce point et l'on a posé de nombreuses questions sur le sujet pour déterminer s'il représente un consensus de mathématiciens, un individu, Brouwer ou autre (VDA -49- p.950).

Pour notre part, nous pensons qu'il est difficile du point de vue philosophique de sortir à propos de l'intuitionnisme d'une philosophie idéaliste mais que cette conception n'altère en rien le soin intuitionniste à éviter les présupposés dans la développement de la science.

L'intuition mathématique est donc première pour les intuitionnistes, ce qui aura pour conséquences l'affirmation de la priorité mathématique sur toute pensée et sur la logique en particulier et le recours à cette seule intuition pour déterminer les valeurs et notamment la vérité.

Le seul critère intuitionniste du vrai est l'intuition de la vérité qui se manifeste par le sentiment d'évidence que nous ressentons face à certaines propositions ou à certains raisonnements.

Pour les intuitionnistes, les propositions mathématiques ne sont vraies ou fausses que pour notre esprit. L'idée d'un état des propositions extérieur au sujet relève de la croyance à l'existence objective des entités mathématiques et nous ramène donc au présupposé platonicien. Pour Brouwer et ses émules, chaque conclusion est contrôlée directement par sa propre évidence. Sans peine on trouvera dans l'idéalisme transcendantal l'inspiration brouwerienne. Pour Kant, la certitude mathématique est immédiate, directe et déterminée car elle ne recouvre pas le réel. C'est l'évidence qui l'assure : elle est intuitive. Pour Kant, la certitude mathématique ne réside pas dans une prise sur l'être mais la mathématique porte sur des possibles et l'évidence intuitive seule nous garantit la certitude. La conception originelle de Brouwer est très proche sur ce point de la conception kantienne. mais elle a, par suite de critiques sérieuses de l'épistémologie du XXème siècle, dû évoluer. Si nous ne trouvons pas, chez Brouwer proprement dit, de textes reprenant cette notion d'évidence, nous notons chez Heyting dans les années 1958-60 une reformulation de cette question.

La philosophie contemporaine des sciences a souligné, au XXème siècle, l'aspect mouvant des théories scientifiques. Après les nouvelles géométries et physiques, la plupart des philosophes de la science et les scientifiques eux-mêmes se sont attachés à montrer le caractère non-absolu des théories scientifiques et leur inadéquation à l'expérience concrète. Le fait expérimental du savant est fort éloigné de l'expérience commune. Ainsi donc, la notion d'évidence elle-même ne peut être que relative à une théorie donnée. Les intuitionnistes ne peuvent donc soutenir le recours à l'évidence que dans les fondements ultimes des mathématiques, pour toutes les premières notions. Le déroulement de cette science échappe à ce recours, ce qui n'a pas été sans créer des difficultés importantes pour la cohérence du système intuitionniste, puisqu'il rejette tout être mathématique qui n'est pas construit directement. Les intuitionnistes dénient, en particulier, tout aspect créatif à l'axiomatique qu'ils considèrent comme un phénomène de simplification pratique apparaissant après la mathématique.

Quant à l'antériorité de la logique, elle n'est pas acceptée par les intuitionnistes qui font remarquer, entre autres, que l'idée de la relation présuppose déjà l'idée de dualité.

La création mathématique est pour l'école intuitionniste d'une nature différente de la formalisation axiomatique ; elle est l'expression de la puissance de l'esprit et on ne peut affirmer qu'un système d'axiomes puisse l'épuiser dans sa totalité (d'autant plus qu'une énumération d'axiomes présuppose également le concept mathématique d'énumération). Sur le rôle de l'axiomatique et de la logique, les positions classique et intuitionniste sont inconciliables puisque c'est tout le problème de l'exigence constructiviste qui divise ici les deux écoles. Le constructivisme n'apporte rien au mathématicien classique, pour qui les théorèmes portent sur des êtres existant objectivement alors qu'il est fondamental pour l'intuitionniste pour qui "les mathématiques sont liées essentiellement à la connaissance humaine" (HE -60- p.117).

De fait, les intuitionnistes ne récusent pas les avantages de la méthode axiomatique pour démontrer bon nombre de propriétés (unification de théories, isomorphies, simplification de théorèmes...) et ils la comprennent comme un système de théorèmes généraux qui ne sont qu'une partie des mathématiques. Le rôle qu'ils lui attribuent est assez proche du rôle accordé à la logique : c'est surtout un rôle pratique.

Ainsi donc, la mathématique intuitionniste garantie dans son origine par l'intuition *a priori* du temps et dans son développement par un constructivisme strict est sûre. D'autre part, partie structurante de notre esprit, elle n'a d'usage que pour une science qui est l'expression de la connaissance humaine et non de la réalité objective. Et le problème du rapport mathématique-réalité s'efface dans une préexistence du mathématique à toute expérience, et perd son acuité pour le fondement des mathématiques qui n'ont pas à rendre compte de leur adéquation à un réel qui n'existe qu'à travers elles. Enfin, avec la liberté du sujet introduite de plein droit, l'intuitionnisme rend parfaitement compte de tout avenir possible de la science et la philosophie idéaliste qui le sous-tend va dans le sens de l'épistémologie contemporaine qui considère la science comme une interprétation et non comme une appréhension du réel.

REMARQUES ET CONCLUSIONS

L'intuitionnisme hollandais est au XXème siècle un mouvement tout à fait original. Cette originalité - remarquée essentiellement sous son aspect négatif de critique de la mathématique classique - s'exprime profondément à travers son constructivisme et l'idéalisme qui le sous-tend. La mathématique conçue comme l'expression de la rationalité du sujet, plus encore, comme le schème de son appréhension du monde, conduit sans détour à un idéalisme transcendantal, kantien dans son projet, mais original dans sa réalisation. Le temps est le seul schème *a priori* de notre connaissance et le monde nouménal sans soutien divin se dissout dans la multiplicité individuelle. Mais, contrepartie intéressante de ce solipsisme, le sujet n'a pour assurer sa connaissance que le recours à un constructivisme strict. Si la connaissance est humaine, elle ne peut dépasser le cadre de la production de l'homme sans risquer l'invérifiabilité et l'aventure. En fait, l'intuitionnisme est école de prudence et d'assurance.

Ainsi, une base philosophique avouée, l'a priorité du temps, conduit à l'édification d'une mathématique rigoureuse et humainement assurée. Il n'y aurait pas là matière à critiques si cette assurance ne se payait au prix de l'amputation d'une part considérable de la science classique. Le rejet de l'intuitionnisme se fait clairement sur ce point. La mathématique classique se montre efficace. Comment peut-on l'amputer, même au nom d'un principe d'assurance dont, malgré les antinomies, on ne ressent pas le besoin ? Il semble en effet bien aventureux, au vu de ces affirmations d'assurance de renier la science classique pour s'engluer dans la complexité intuitionniste. Mais précisément, et c'est là que l'intuitionnisme prend son intérêt, cette solidité classique sur quoi repose-t-elle ? Les démonstrations de non-contradictions se sont embourbées dans leur report continuel au métalangage qui les énonce. La science se montre, chaque jour davantage, interprétation de l'objet et non appréhension. La mathématique peut-elle refléter l'être mathématique objectif directement sans déformation ? Et quelle est cette objectivité mathématique ? Qu'est-ce que cette confiance en la certitude mathématique sinon la croyance en l'adéquation de la mathématique qui se fait et d'une réalité objective ? Et comment peut-on parler de l'objet mathématique, en faisant fi de toute philosophie ? Si l'objet mathématique est autonome, hors nature, quel est son apport à l'homme et au monde ? S'il est dans le monde, acceptons-nous l'empirisme qu'il implique ? En fait, la science classique ne s'interroge pas sur l'objet mathématique. Elle le constitue ou elle le découvre, peu importe, et cela, au nom de l'efficacité. Ainsi, en ce même nom, on déblaie toute considération sur les fondements. Mais, qu'est-ce que cette position sinon une position philosophique, et une philosophie qui s'ignore ?

C'est cet aspect qu'éclaire particulièrement, nous semble-t-il, l'école hollandaise. En effet, en portant toute son attention sur la certitude mathématique et son fondement, elle débusque les ombres philosophiques qui s'estompent derrière la science classique. La vérité mathématique apparaît comme un *a priori* immuable, fondé *a posteriori* que l'efficacité. Parce qu'elle est efficace, la mathématique classique est vraie.

L'intuitionnisme est donc déjà, à tout le moins, un indicateur ; en stigmatisant les *a priori* classiques, il nous permet de relativiser notre foi dans la mathématique classique. D'autre part, en introduisant le sujet dans le procès mathématique, l'intuitionnisme hollandais justifie tout développement futur de la science, aussi contraire soit-il à la science que nous connaissons. En insistant sur l'inadéquation fondamentale de tout formalisme à l'activité mathématique, il se trouve postérieurement confirmé par le théorème de Gödel démontrant que les formalismes de l'arithmétique sont nécessairement incomplets. En remettant en question certains principes déductifs, il permet de concevoir une logique (voire une arithmétique) différente de la logique classique, une logique qui se relativise par rapport aux états de la connaissance humaine. Et ce n'est pas une logique qui serait une partie de la logique classique mais, bien au contraire, une logique qui se prolongerait au-delà de celle-ci.

En étouffant donc l'intuitionnisme en prenant cause de ses excès, on élimine du même coup un témoin gênant dans la remise en question des fondements de la science et aussi une possibilité de développement, dans une voie tout à fait nouvelle, de la recherche scientifique.

Enfin, si l'intuitionnisme n'a pas montré suffisamment son importance, voire même sa justification, à l'intérieur des sciences elles-mêmes, il reste qu'il est un regard nouveau sur la connaissance. Il fait une science du sujet alors que la science classique est une science de l'objet. Et, si en tant que tel il ne mérite pas l'attention du scientifique, il nous paraît néanmoins mériter grandement l'attention du philosophe, d'abord par les questions qu'il soulève et les relativisations auxquelles il oblige, et surtout par l'éclairage nouveau qu'il pose sur les problèmes de philosophie de la connaissance de par son option idéaliste.

En effet, l'intuitionnisme rend compte de la possibilité de connaître, de la certitude mathématique et du rapport de l'homme à la réalité. Il permet, d'autre part, une interprétation épistémologique satisfaisante de l'évolution des phénomènes scientifiques modernes.

Cependant, un certain nombre de points dans la philosophie de Brouwer entraîne des remarques. La première a trait aux difficultés rencontrées par l'intuitionnisme dans le développement de son propre projet. Certaines notions comme celle d'espèce entraînent de difficultés. D'autre part, il n'est guère possible de concevoir la mathématique dans sa totalité comme activité mentale et la mathématique intuitionniste elle-même atteint un niveau de complexité tel que le recours au langage mathématique semble irrémédiable. Tous ces faits affaiblissent la conception brouwerienne dans sa pureté idéaliste. Mais, par contre, ils renforcent l'école intuitionniste dans son ensemble en la montrant comme une école sachant s'adapter et répondre aux problèmes réels posés. La part de l'intuitionnisme qui apparaît là au premier plan est celle qui préconise un fondement sûr au discours mathématique et l'étude précise des postulats à adopter. C'est d'ailleurs par ce biais que l'intuitionnisme est reconnu le plus souvent par les mathématiciens classiques.

Le deuxième point que nous soulignerons est le suivant : l'intuitionnisme relativise les concepts scientifiques par rapport à l'état de notre connaissance qui, elle, dépend de l'état de la civilisation qu'on considère. Il s'agit donc de relativiser la science par rapport au social. Mais il ne s'agit pas de rendre directement compte de tel raisonnement mathématique par tel fait social mais d'introduire le social au niveau des concepts de base. Ainsi, c'est un certain état social qui relève de l'histoire des civilisations qui explique la croyance dans la rationalité de π ou dans le caractère normatif de la logique classique. Le social n'apparaît dans l'explication épistémologique qu'au delà du développement propre des concepts. Il n'est pas cause de tel ou tel théorème mais de tel état de la connaissance. Et, cette influence est réciproque puisque pour les intuitionnistes, la science et le monde c'est-à-dire notre connaissance du monde, se développent de conserve, se construisent ensemble, ne préexistent ni l'un ni l'autre à l'un ou l'autre. Le social prend sa place en sciences parce qu'il reflète un état de la connaissance.

Enfin, si l'intuitionnisme permet de rendre compte de l'évolution de toutes les notions, il fixe sans appel celle de temps et celle de nombre. Si l'on peut, en acceptant ce postulat, développer à travers la construction des mathématiques une théorie de la connaissance qui n'est pas nécessairement d'ailleurs le reflet exact des pensées de Brouwer et qui permet d'éclairer de nombreux problèmes, on peut également s'interroger sur le bien fondé de ce postulat sur lequel repose entièrement l'intuitionnisme.

Quoiqu'il en soit, on peut considérer que si l'intuitionnisme n'a pas réussi sans bavures à reconstruire les mathématiques, l'apport qu'il a eu n'en est pas moins remarquable, ne serait-ce que du fait de l'hostilité que sa démarche a rencontrée dans le milieu scientifique. D'ailleurs, si Brouwer posait, au début du siècle, la mathématique intuitionniste comme seule valable, l'acuité de cette affirmation s'est considérablement émoussée à travers le temps et les disciples du savant hollandais. Toutefois, l'intuitionnisme réclame, et il nous semble que c'est en toute légitimité, le droit d'être considéré comme une autre façon de voir la science et comme une alternative à une conception platonicienne de la connaissance, qui a apporté beaucoup et peut certainement ouvrir encore bien des horizons.

BIBLIOGRAPHIE DES OUVRAGES CITÉS

BROUWER L.E.J.

1907 *Over de grondslagen der wiskunde* -Thèse- Amsterdam

1923 "On the Signifiance of the Principe of Excluded Middle in Mathematics, especially in function Theory" -in *From Frege to Gödel*- j.van Heijenoort (ed) 1967 - Cambridge (Mass.).

1952 "Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism" -in *South African Journal of Science* n°49 - p.139-146.

HEYTING A.

1954 "Logique et intuitionnisme" -in *Actes du 11ème Congrès intern. de logique math.*- Paris - p.75-82

1960 "Remarques sur le constructivisme" -in *Logique et Analyse* n°3 - p.177-182.

TROELSTRA A.S.

1969 *Principles of Intuitionism* - Berlin

Van DANTZIG D.
1949 "Comments on Brouwer's Theorem on Essentially Negative Predicates" - in *Kpon. Ned. Akd.Wet.* (Amsterdam) - *Proc.Sect.Sc.* n° 52 - p.949-957.

WAVRE R.
1924 "Y-a-t-il une crise des mathématiques ?" -in *Revue de Métaphysique et de Morale* n°31 - p.435-470.